Απ1 No. Date 15/1/2018

Θ.Μ.Τ. για παραγώγους

Λήμμα

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ (διάστ.) $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ και $f'(c)\ \exists$

Τότε: (a) Εάν $f'(c) > 0 \rightsquigarrow \exists\, \delta > 0$ τ.ω. $f(x) > f(c)\ \forall x \in I$ με $c < x < c+\delta$

(b) Εάν $f'(c) < 0 \rightsquigarrow \exists\, \delta > 0$ τ.ω. $f(x) < f(c)$ » »

Αν η f' ήταν συνεχής στο I το συμπέρασμα του λήμματος είναι προφανές.

Απόδειξη

(a) Αφού $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) > 0$.

έχουμε ότι $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $x \in I$ με $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > \frac{f'(c)}{2} > 0$$

Εφαρμόσαμε τον ε-δ ορισμό του ορίου με $\varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$

Μάλιστα εάν $x > c$ όπως άνω, τότε:

$$f(x)-f(c) = (x-c)\,\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

Το (b) ομοίως

Θεώρημα Darboux

Εάν f διαφορίσιμη στο $I = [a,b]$ και κ μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$

$\Rightarrow \exists$ τουλάχιστον ένα $c \in (a,b)$ τ.ω. $f'(c) = \kappa$

Παρατήρηση: Αν f' συνεχής στο $[a,b]$ τότε το Θεώρημα Darboux είναι προφανές από το Θ.Ε.Τ.

Δίχως βλάβη Γενικότητας
W.L.O.G. without loss of generality

No. Date

Απόδειξη

Υποθ. (ΔΒΓ) $f'(a) < k < f'(b)$. Ορίζουμε $g(x) = kx - f(x)$, $x \in I$

Η g είναι συνεχής στο $I = [a, b]$

(διότι η f διαφορ. στο I δίνει ότι η f είναι συνεχής στο I)

Άρα η g λαμβάνει ολικό μέγιστο στο I

Αφού $g'(a) = k - f'(a) > 0$, το προηγούμενο λήμμα δίνει μικρό $\delta > 0$

τ.ω. $g(x) > g(a)$ $\forall x \in (a, a+\delta)$

Άρα αποκλείεται το μέγιστο αυτό να λαμβάνεται στο $x = a$

Ομοίως, αφού $g'(b) = k - f'(b) < 0$, το μέγιστο αυτό δε λαμβάνεται ούτε στο $x = b$

Σαφώς το ολικό μέγιστο της g θα λαμβάνεται σε εσωτερικό σημείο c άρα $g'(c) = 0$.

με $a < c < b$

- Έχω χρησιμοποιήσει ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό και η g διαφορίσιμη στα άκρα

Αφού g διαφορ. στο $x = c$ $\rightsquigarrow g'(c) = 0$

$\rightsquigarrow f'(c) = k$

Παράδειγμα

Θεωρείστε $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

(δηλαδή $g(x) = \mathrm{sgn}(x)$).

Σαφώς η g δεν ικανοποιεί την ιδιότητα ενδιάμεσων τιμών

(π.χ. δεν λαμβάνει η g το $\frac{1}{2}$ που είναι μεταξύ του $g(0)$ και του $g(1)$)

Άρα από το θεώρημα Darboux $\Rightarrow \nexists$ συνάρτηση f με $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [-1, 1]$.

- Εάν η g ήταν παράγωγος κάποιας συνάρτησης f τότε από το Θ. Darboux η g θα ικανοποιούσε το ΘΕΤ κάτι που δεν ισχύει.

* Η f ικανοποιεί τις ιδιότητες του ΘΕΤ. στο $I \iff$ η f λαμβάνει κάθε κ μεταξύ $f(x_1)$ και $f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

Υποδείξεις για Τριγωνομετρικές Ασκήσεις

$\sin\theta = 0 \iff \theta = \kappa\pi \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}$

$\cos(2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\sin(2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$

$\sin(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$

Λύση σε Προηγούμενη Άσκηση

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ $\qquad A = \mathbb{R} / \{\frac{1}{\kappa\pi}, \kappa \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{x=0\}$

Το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του A

Θεωρώ $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \in A \quad x_n \neq 0 \quad x_n \to 0$

$f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow +\infty$

$y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \in A \quad y_n \neq 0 \quad y_n \to 0$

$f(y_n) = -(2n\pi - \frac{\pi}{2}) \to -\infty$

No. Date

Άσκηση: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}} =$

Για $x \in A$, $x \neq 0$ έχω $\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}} \geq \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$

$x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \leq x^2$

$\frac{1}{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \geqslant \frac{1}{x^2}$

Άσκηση: Εάν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορ. και $\lim_{x\to\infty} f' = 1 \rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty} f = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = 1. \rightsquigarrow \exists\, \theta >> 1$ τ.ω. $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ $\forall x > \theta$

$\rightsquigarrow f(x) > \frac{x}{2}$ $\forall x > \theta$ $\rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} f = \infty.$

Χωρίς L'Hospital.

$\lim_{x\to\infty} f' = 1 \rightsquigarrow \exists\, \gamma >> 1$ τ.ω. $f'(x) > \frac{1}{2}$ $\forall x > \gamma$ (1)

Έστω $x > \gamma$ κάνω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma, x]$

$\rightsquigarrow \exists\, c = c_x \in (\gamma, x)$ τ.ω. $\frac{f(x) - f(\gamma)}{x - \gamma} = f'(c) > \frac{1}{2}$